1.3 CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to +\infty$

COMPARACIÓN DE INFINITOS

Dadas dos potencias de x, la de mayor exponente es un infinito de orden superior:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^5}{2x^2} = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^{5/2}} = 0$$

Dadas dos funciones exponenciales de bases mayores que 1, la de mayor base es un infinito de orden superior:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{2^{x+1}} = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{5^{x+9}}{8^{x+3}} = 0$$

Cualquier función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior a cualquier potencia:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1{,}3^x}{300x^{50}} = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{25}}{2^x} = 0$$

Tanto las funciones exponenciales de base mayor que 1 como las potencias de x son infinitos de orden superior a cualquier función logarítmica:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\log x} = +\infty; \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$$

Si en una suma hay varios sumandos infinitos, el orden de la suma es el del sumando de mayor orden:

$$\lim_{x \to +\infty} (6x^3 + 2x^2 - 2x) = \lim_{x \to +\infty} (6x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (-2x^5 + 3^x) = \lim_{x \to +\infty} 3^x = +\infty$$

1 Teniendo en cuenta los resultados anteriores, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x}{x^5}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{\log x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x^4}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^{x+1}}{\log x}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 2x^2 - 3^x)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 3x} - \sqrt{x + 2}\right)$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3^x - \log_2 x)$ i) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x + 1) - 2x^3)$

COCIENTE DE POLINOMIOS

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$$

- Si grado de $P >$ grado de Q $(m > n)$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ $\left(\text{el signo es el de } \dfrac{a}{b}\right)$.
- Si grado de $P <$ grado de Q $(m < n)$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- Si grado de $P =$ grado de Q $(m = n)$, entonces $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{a}{b}$.

2 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 + 8x^2 + 2x}{3x^4 + 2x - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x-3)^3}{x^2 + 3x}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)(2x-3)}{x^2 + 4x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3 - 2x}{3x + 4}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x-1}{6}\right)^2$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3}{(x-2)^2}$

COCIENTE DE OTRAS EXPRESIONES INFINITAS

La regla utilizada para el cociente de polinomios es también válida cuando hay expresiones con radicales. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5 + 2x}}{\sqrt[4]{x - 1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{5/3}}{x^{1/4}} = +\infty \ \left(\text{pues } \frac{5}{3} > \frac{1}{4}\right)$$

3 Calcula estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{4x - 1}}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3 + 2x}}{x + 2}$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2 - 2x}}{\sqrt{9x + 2}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^3 + 2x}}{\sqrt[5]{x^2 - 1}}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + 2}{\sqrt[3]{x^4 - 3x}}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{8x^2 + 3}{2x^2 - x}}$

DIFERENCIA DE EXPRESIONES INFINITAS

I. Si apreciamos que las expresiones cuya diferencia se nos propone son **infinitos de orden distinto**, podemos atribuir, directamente, límite $+\infty$ o $-\infty$ (ver página anterior).

II. **Si podemos efectuar la operación**, la hacemos y después calculamos el límite; por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 1}{x + 1} - \frac{6x - 1}{2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-5x - 1}{2x + 2} = \frac{-5}{2}$$

III. **Si hay raíces cuadradas** en el minuendo, en el sustraendo, o en ambos, multiplicamos y dividimos por el conjugado; por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x\right)\left(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x\right)}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1} + 2x} = 0$$

4 Halla el valor de estos límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5^x - 3x^2)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{3x}{x-1}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2} - \dfrac{x^2-1}{x}\right)$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3x - \sqrt{x^2 - x}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x} - \log_3 x\right)$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x - x^{18})$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2-2x}{x-1} - \dfrac{2x}{3}\right)$

LÍMITE DE UNA POTENCIA. NÚMERO *e*

- En muchos casos se puede calcular el límite de una potencia sin más que conocer los límites de la base y del exponente. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{2x-1}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{(+\infty)} = +\infty$$

- **Indeterminación del tipo $(1)^{+\infty}$:**

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 1] \cdot g(x)}$$

Por ejemplo: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2-2x}{3x^2-1}\right)^{2x-1} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{3x^2-2x}{3x^2-1} - 1\right] \cdot (2x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-4x^2+4x-1}{3x^2-1}} = e^{-4/3}$

5 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{5x-2}{6x+1}\right)^{4x+3}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x+1}\right)^{3x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{4x-2}{3x^2}\right)^{x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{\frac{2x+1}{3}}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x^2+1}{x+1}\right)^{-x^2}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{2-x}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+4}{3+2x}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-5}{3+x}\right)^{\frac{x+1}{2x+3}}$

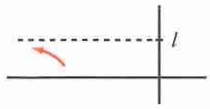
i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x-5}{3+x}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

1.4 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x \to -\infty$

DEFINICIONES

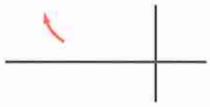
Cuando $x \to -\infty$, podemos encontrarnos uno de estos casos:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l \iff$ Podemos conseguir que $f(x)$ esté tan próximo a l como queramos, sin más que darle a x valores suficientemente "grandes y negativos".

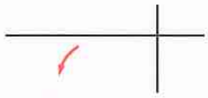


$\iff$ Dado $\varepsilon > 0$, existe h (suficientemente grande) tal que: si $x < -h$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

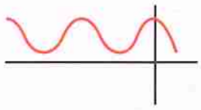
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$



- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe.



Las definiciones de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ son como las de $x \to +\infty$, pero poniendo $x < -h$ donde allí se ponía $x > h$ (ver página 4).

CÁLCULO

Para calcular límites cuando $x \to -\infty$, tendremos en cuenta que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$$

EJERCICIO RESUELTO

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{5x^2 + 2x - 3}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^5 - 3}}{x^2 + 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^4 - 2} + x\right)$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x$

RESOLUCIÓN

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 1}{5x^2 + 2x - 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{5x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x}{5} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{2x^5 - 3}}{x^2 + 1}$ no existe, pues el radicando, $2x^5 - 3$, toma valores negativos cuando $x \to -\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^4 - 2} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^4 - 2} - x\right) = +\infty$, pues $\sqrt{x^4 - 2}$ es un infinito de orden superior que x.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x\right]^{-1} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

1 Aplica la definición para cada una de las siguientes expresiones y representa cada resultado:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2 + 1}{x^2} = 2$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x - 2) = -+\infty$

2 Halla el valor de cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 1\right)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \dfrac{1}{4}\right)^5$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^2 - 6x + 2}{3x^3 - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-2)^3}{x^2 + 4x - 2}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x+1)(x-3)}{x^2 + 4}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5 - x}{2x + 3}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x^2 + 2}{1 - x^2}\right)^2$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{(x+1)^2}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 2}}{2x + 1}$

j) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{3x + 4}}{x + 2}$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{3x + 4}{x + 2}}$

l) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3x + 4}}{x + 2}$

m) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^6 + 1} - 2x}{1 - \sqrt[3]{x^2}}$

n) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$

ñ) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3^x - x^2)$

o) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\log(-x)}{3^{-x}}$

p) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\ln(x^2) + x^3)$

q) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^6 + 3} + x^2\right)$

r) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{1 - x} - \sqrt{2 - x}\right)$

s) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2 - 3}{2x + 1}\right)$

t) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x + 1}{2} - \dfrac{x^2 - 1}{x}\right)$

u) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x + \sqrt{x^2 - x}\right)$

v) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x}{x + 1} - \dfrac{2x}{3}\right)$

w) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{4 + 2x}{3x + 1}\right)^{x^2 + 1}$

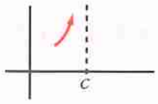
x) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x - 1}{2 + x}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

y) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{x^2 - 1}{2 + x^2}\right)^{\frac{x+1}{2x}}$

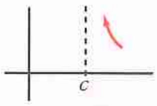
z) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x + 3}{1 + x}\right)^{x + 1}$

1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO. DEFINICIONES

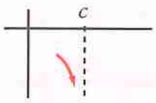
■ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = +\infty \iff$ Dado un número k, podemos encontrar otro número $\delta > 0$ tal que:
Si $c - \delta < x < c$, entonces $f(x) > k$



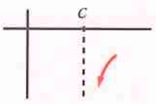
■ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = +\infty \iff$ Dado k, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que:
Si $c < x < c + \delta$, entonces $f(x) > k$



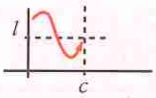
■ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = -\infty \iff$ Dado k, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que:
Si $c - \delta < x < c$, entonces $f(x) < -k$



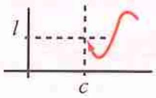
■ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = -\infty \iff$ Dado k, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que:
Si $c < x < c + \delta$, entonces $f(x) < -k$



■ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = l \iff$ Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que:
Si $c - \delta < x < c$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$

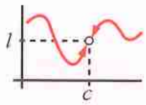


■ $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = l \iff$ Dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que:
Si $c < x < c + \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$



■ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = l \iff$ Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que:
Si $x \neq c$ y $c - \delta < x < c + \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$

$\iff$ Existen los límites laterales y coinciden:
$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$



1 Aplica la definición para cada expresión y representa cada resultado:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3}{x-1} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3}{x-1} = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{3}{1-x} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{3}{1-x} = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 1^-} (3x - 1) = 2$

f) $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 1) = 10$

1.6 CÁLCULO DE LÍMITES CUANDO $x \to c$

EJERCICIO RESUELTO

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & si\ \ x \leq 3 \\ x^2 - 8 & si\ \ 3 < x \leq 4 \\ 2^x & si\ \ x > 4 \end{cases}$ ***, halla los límites de*** $f(x)$ ***en 0, 3, 4 y 5.***

RESOLUCIÓN

En $x = 0$: El dominio de $f(x)$ es $[2, +\infty)$. Por tanto, no existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

En $x = 3$: Hallamos los límites laterales:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} f(x) &= \lim_{x \to 3^-} \left(\sqrt{x-2}\right) = \sqrt{3-2} = 1 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) &= \lim_{x \to 3^+} (x^2 - 8) = 9 - 8 = 1 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 3} f(x) = 1$$

En $x = 4$: Hallamos los límites laterales:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 4^-} f(x) &= \lim_{x \to 4^-} (x^2 - 8) = 8 \\ \lim_{x \to 4^+} f(x) &= \lim_{x \to 4^+} 2^x = 16 \end{aligned}\right\} \text{No existe } \lim_{x \to 4} f(x)$$

En $x = 5$: $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} 2^x = 32$

---

1 Halla los siguientes límites en los casos en los que sea posible:

a) $\lim\limits_{x \to -2} \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{3x + 1}$ c) $\lim\limits_{x \to 1/2} \sqrt{4x + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{1 - x}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \cos x)$ f) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(x + 1)}{e^x}$

2 Halla los límites de $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq -1 \\ x + 3 & \text{si } -1 < x < 0 \\ \frac{3}{x + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

3 Halla el valor de a para que exista $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{si } x > -3 \\ x^2 + a & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

EJERCICIO RESUELTO

Halla los siguientes límites:

a) $= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3}{x-1}$ ***b)*** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-4x}{x^2-x-2}$ ***c)*** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3-2x+1}}{\sqrt{x-1}}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}\right)$ ***e)*** $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x+2}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

RESOLUCIÓN

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-3}{x-1} = \left(\dfrac{-2}{0}\right) = (\pm\infty)$. Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-3}{x-1} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-3}{x-1} = -\infty$$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-4x}{x^2-x-2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(x+2)(x-2)}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(x+2)}{x+1} = \dfrac{8}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x^3-2x+1}}{\sqrt{x-1}} = \left(\dfrac{0}{0}\right) \overset{(*)}{=} \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{\dfrac{x(x-1)^2}{(x-1)^2}} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt[4]{x} = 1$

(*) Hemos reducido a índice común las raíces.

d) Como es indeterminado, $(\pm\infty) - (\pm\infty)$, efectuamos la operación:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{x-3}{(x-1)(x-2)}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-2} = -1$$

e) Es una indeterminación del tipo $(1)^{(\pm\infty)}$. Por tanto:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+2}{3}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{x+2}{3} - 1\right) \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{3} \cdot \frac{1}{x-1}} = e^{1/3}$$

4 Calcula los siguientes límites:

a) $= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-9x}{x^2+x-12}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-9x}{x^2+x-12}$ c) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3-9x}{x^2+x-12}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{\sqrt[3]{x^2+x-2}}$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^2-2}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2-2}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)$

g)$= \lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+4}{3x-2}\right)^{x-2}$ h) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x+2}{4}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ i) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^2+1}{3x-1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}$

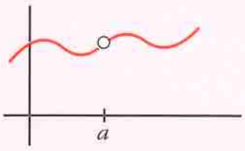
j) $= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{5-x}-2}{x-1}$ k) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2}$ l) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$

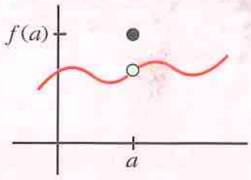
☛ *En j), k) y l) utiliza el conjugado.*

1.7 CONTINUIDAD

- Una función **$f(x)$ es continua en $x = a$** cuando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- **Tipos de discontinuidad en un punto**

① **Discontinuidad evitable**





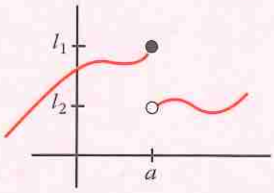
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, pero no existe $f(a)$

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

Existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, existe $f(a)$, pero $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

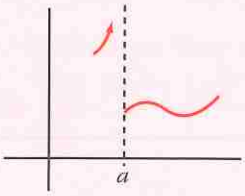
② **Discontinuidad de salto finito**



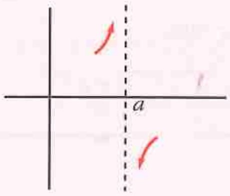
Existen los límites laterales, pero no coinciden:

$l_1 = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l_2$

③ **Discontinuidad infinita (asíntota vertical en $x = a$)**



$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

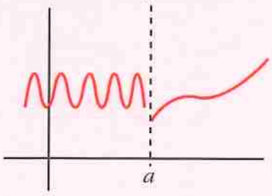


$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Algunos de los límites laterales (o los dos) son infinitos:

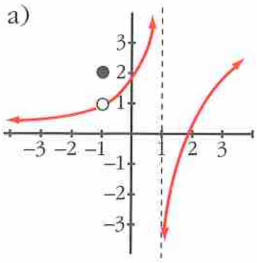
$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ y/o $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$

④ **No existe alguno de los límites laterales**

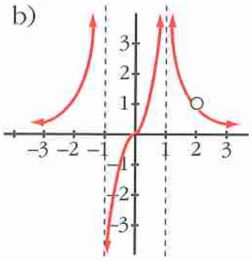


1 Estudia la continuidad de estas funciones. En los puntos en los que no sean continuas, indica el tipo de discontinuidad:

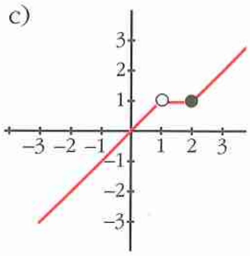
a)



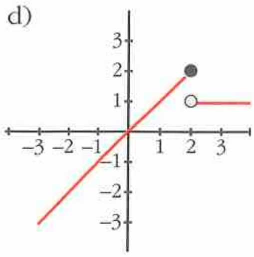
b)



c)



d)



EJERCICIO RESUELTO

Estudia la continuidad de cada una de estas funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{si } x \le 0 \\ |x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Resolución

a) Dominio = $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$; $f(x)$ es continua en su dominio.

Veamos los tipos de discontinuidades:

- $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \pm\infty$

  Discontinuidad infinita en $x = -2$ (asíntota vertical en $x = -2$).

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{1}{3}$

  Discontinuidad evitable en $x = 1$.

b) • Si $x \ne 0$, $f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.

- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2^x - 1) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} |x| = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \\ f(x) \text{ es continua en } x = 0 \end{array}$$

Por tanto, $f(x)$ es una función continua.

---

2 Estudia la continuidad de estas funciones. En los puntos en los que no sean continuas, estudia el tipo de discontinuidad

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 1}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} - 1 & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 0 < x \le 1 \\ |x| & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 8x}{x + 4} & \text{si } x \ne -4 \\ 5 & \text{si } x = -4 \end{cases}$

EJERCICIO RESUELTO

Estudia la continuidad de esta función según los valores de a:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & si\ x \leq 0 \\ x & si\ 0 < x < 2 \\ 2x + a & si\ x \geq 2 \end{cases}$$

Resolución

- Si $x \neq 0$ y $x \neq 2 \rightarrow f(x)$ es continua, pues está formada por funciones continuas.
- En $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 - 3x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \\ f(x) \text{ es continua en } x = 0 \end{array}$$

- En $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + a) = 4 + a \\ f(a) = 4 + a \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x = 2\text{, ha de ser:} \\ 2 = 4 + a \rightarrow a = -2 \end{array}$$

- Por tanto, si $a = -2$, $f(x)$ es continua; y si $a \neq -2$, $f(x)$ tiene una discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

---

3 Halla el valor de a y/o b para que las siguientes funciones sean continuas:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x \leq -1 \\ x + a & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ e^{ax} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \leq 1 \\ 2\sqrt{x} + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1.8 TEOREMA DE BOLZANO

TEOREMA DE BOLZANO

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y "signo de $f(a) \neq$ signo de $f(b)$", entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

EJERCICIO RESUELTO

Encuentra un intervalo de amplitud menor que 2 en el que la ecuación $x^3 - 3x + 5 = 0$ tenga una raíz. Aproxima el valor de dicha raíz hasta las décimas.

RESOLUCIÓN

Tomamos la función $f(x) = x^3 - 3x + 5$, que es continua por ser polinómica.

Tanteando, encontramos que $f(-3) = -13$, $f(-2) = 3$.

Así, $f(x)$ es continua en $[-3, -2]$ y signo de $f(-3) \neq$ signo de $f(-2)$.

Por tanto, aplicando el teorema de Bolzano, sabemos que existe $c \in (-3, -2)$ tal que $f(c) = 0$. La raíz de la ecuación es c.

Probando con valores decimales, obtenemos $f(-2{,}3) = -0{,}267$; $f(-2{,}2) = 0{,}952$.

Por tanto, podemos asegurar que $-2{,}3$ se aproxima en menos de una décima a la raíz que buscamos.

1 a) Demuestra que la función $f(x) = -x^5 - 3x^2 + 5$ corta al eje OX en el intervalo $(0, 2)$.

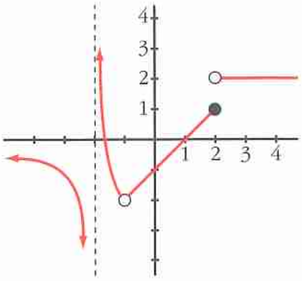
b) Aproxima hasta las décimas una raíz de la ecuación $-x^5 - 3x^2 + 5 = 0$.

2 Encuentra un intervalo en el que la ecuación $\cos x + x - 2 = 0$ tenga una raíz.

3 La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano?

1.9 EJERCICIOS DE RECAPITULACIÓN (LÍMITES Y CONTINUIDAD)

1 La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$:



a) Estudia su continuidad. En los puntos en los que no sea continua, indica el tipo de discontinuidad.

b) Halla los siguientes límites:

$\lim\limits_{x \to -} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to -1} f(x)$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2 Sabemos que: $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3} \mathrm{h}(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to 3} u(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 3} v(x) = \frac{1}{2}$

Di en cuáles de los siguientes casos hay indeterminaciones; y, si no, di cuál es el límite:

a) $\lim\limits_{x \to 3} [f(x) + g(x)]$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x \to 3} [u(x)]^{\mathrm{h}(x)}$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{x \to 3} [v(x)]^{f(x)}$

d) $\lim\limits_{x \to 3} [f(x)]^{u(x)}$ $\qquad$ e) $\lim\limits_{x \to 3} [\mathrm{h}(x)]^{g(x)}$ $\qquad$ f) $\lim\limits_{x \to 3} [g(x) \cdot u(x)]$

3 a) Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$, halla los siguientes límites y representa los resultados:

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\qquad \lim\limits_{x \to -3} f(x)$; $\qquad \lim\limits_{x \to 3} f(x)$; $\qquad \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

4 Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3 + 2x}{5x + 1}\right)^{x^2 - 1}$ $\qquad$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^2 + 1}{x - 1} - \dfrac{4x + 1}{2}\right)$ $\qquad$ c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^{3x - 6}}{x + 1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^{x + 2}}{x^6 + 2x^2}$ $\qquad$ e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^4 + x} - x^2\right)$ $\qquad$ f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 4x - 5}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^2 - \log x)$ $\qquad$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x + 2}\right)$ $\qquad$ i) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

5 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x+2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x-1} \right)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[5]{x^2+3x}}{1+2\sqrt{x}}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{3x+1}{x-1} \right)^{x-3}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{2x-2}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+x} \right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3+2x}{x^4+3}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{3x-1}{5} \right)^{\frac{1}{x-2}}$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{3+2x} \right)^{x+2}$

i) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4} \right)^2$

6 Estudia la continuidad de estas funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x}{4-x} & \text{si } x \le -1 \\ 2^{-x} - 3 & \text{si } -1 < x \le 0 \\ 3x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+x} & \text{si } x \ne 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

7 a) Halla el valor de m y n para que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - m & \text{si } x \le 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } 0 < x \le 2 \\ nx - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Representa gráficamente la función anterior para los valores de m y n que hayas obtenido en el apartado a).

8 La función $f(x) = \begin{cases} |x-5| & \text{si } x \le 2 \\ 1 - 2^x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ está definida en el intervalo $[1, 3]$ y cumple que "signo de $f(1) \ne$ signo de $f(3)$", pero no existe ningún $c \in (1, 3)$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? Justifica la respuesta.

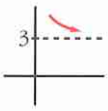
SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS

Página 3

1 a) Indeterminado b) $+\infty$
c) $+\infty$ d) $-\infty$
e) Indeterminado f) $\pm\infty$
g) 0 h) $+\infty$
i) 0 j) Indeterminado
k) Indeterminado l) Indeterminado

2 a) $+\infty$ b) 2 c) $+\infty$ d) $+\infty$
e) 3 f) $+\infty$ g) $\sqrt{2}$ h) $+\infty$
i) $-\infty$ j) no existe k) 1 l) e

Página 4

1 a)  b) 

c) 

2 a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$

Página 5

3 a) Indeterminado b) $+\infty$
c) $+\infty$ d) $+\infty$
e) Indeterminado f) $-\infty$
g) 0 h) 0
i) $\pm\infty$ j) Indeterminado
k) 0 l) $-\infty$
m) $+\infty$ n) $+\infty$
ñ) 0 o) 1
p) Indeterminado q) Indeterminado

Página 6

1 a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) 0 e) $+\infty$
f) $-\infty$ g) $+\infty$ h) $+\infty$ i) $-\infty$

Página 7

2 a) 0 b) $+\infty$ c) 2 d) $\dfrac{-2}{3}$ e) $+\infty$ f) $-\infty$

3 a) $\dfrac{-3}{2}$ b) 2 c) $\dfrac{1}{3}$ d) $+\infty$ e) 0 f) $\sqrt[3]{4}$

Página 8

4 a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $\dfrac{5}{2}$ d) $+\infty$ e) 0
f) $+\infty$ g) $\dfrac{1}{2}$ h) $+\infty$ i) $+\infty$

5 a) 0 b) $+\infty$ c) $e^{4/3}$ d) $e^{10/3}$ e) 0
f) 0 g) $e^{1/4}$ h) 1 i) e^{-4}

Página 10

1 a) Dado un nº k, podemos encontrar otro nº h tal que si $x < -h$, entonces $x^2 - 1 > k$.

b) Dado $\varepsilon > 0$, existe h tal que, si $x < -h$, entonces $\left| \dfrac{2x^2 + 1}{x^2} - 2 \right| < \varepsilon$.

c) Dado un nº k, podemos encontrar otro nº h tal que si $x < -h$, entonces $3x - 2 < -k$.

2 a) $-\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) $-\infty$
e) 1 f) $\dfrac{-1}{2}$ g) 9 h) -1
i) $\dfrac{-1}{2}$ j) 0 k) $\sqrt{3}$ l) 0
m) $+\infty$ n) 0 ñ) $-\infty$ o) 0
p) $-\infty$ q) $+\infty$ r) 0 s) $-\infty$
t) $\dfrac{1}{2}$ u) $-\infty$ v) $-\infty$ w) 0
x) $e^{-3/2}$ y) 1 z) 0

Página 11

1 a) Dado k, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, si $1 - \delta < x < 1$, entonces $\dfrac{3}{x-1} < -k$.

b) Dado k, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, si $1 < x < 1 + \delta$, entonces $\frac{3}{x-1} > k$.

c) Dado k, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, si $1 - \delta < x < 1$, entonces $\frac{3}{1-x} > k$.

d) Dado k, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, si $1 < x < 1 + \delta$, entonces $\frac{3}{1-x} < -k$.

e) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $1 - \delta < x < 1$ entonces $|(3x-1) - 2| < \varepsilon$.

f) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, si $x \neq 3$ y $3 - \delta < x < 3 + \delta$, entonces $|(x^2+1) - 10| < \varepsilon$.

Página 12

1. a) $\frac{29}{4}$ b) 0 c) 2 d) No existe e) 2 f) 0

2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 2 \end{array}\right\}$ No existe $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

   $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3 \end{array}\right\}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 3$

   $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{3}{x+1} = \frac{3}{2}$

3. $a = -10$

Página 13

4. a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{18}{7}$

   c) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = +\infty$

   d) 0 e) $-\infty$ f) -2 g) 1

   h) $e^{1/4}$ i) e^{-1} j) $\frac{-1}{4}$

   k) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ l) $\frac{1}{2}$

Página 14

1. a) Continua si $x \neq -1$ y $x \neq 1$.

   Discontinuidad evitable en $x = -1$; discontinuidad infinita (asíntota vertical) en $x = 1$.

   b) Continua si $x \neq -1$, $x \neq 1$ y $x \neq 2$.

   Discontinuidades infinitas (asíntotas verticales) en $x = -1$ y en $x = 1$; discontinuidad evitable en $x = 2$.

   c) Continua si $x \neq 1$. Discontinuidad evitable en $x = 1$.

   d) Continua si $x \neq 2$. Discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

Página 15

2. a) Continua si $x \neq 2$. Discontinuidad infinita (asíntota vertical) en $x = 2$.

   b) Continua si $x \neq -1$. Discontinuidad infinita (asíntota vertical) en $x = -1$.

   c) Continua si $x \neq 0$. Discontinuidad infinita en $x = 0$.

   d) Continua si $x \neq -4$. Discontinuidad evitable en $x = -4$.

Página 16

1. a) $a = 1$, $b = 1$

   b) $a = -1/2$

Página 17

1. a) $f(x)$ es continua en $(0, 2)$; $f(0) = 5 > 0$; $f(2) = -39 < 0$. Por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$; es decir, $f(x)$ corta al eje OX en $x = c$.

   b) $f(1) = 1 > 0$; $f(1{,}1) = -0{,}24 < 0$. Por tanto; $x = 1{,}1$ se aproxima en menos de una décima a la raíz que buscamos.

2. a) Tomamos $f(x) = \cos x + x - 2$; $f(0) = -1 < 0$ $f(\pi) = \pi - 3 > 0$. Por el teorema de Bolzano, sabemos que en el intervalo $(0, \pi)$ existe una raíz de la ecuación dada.

3. $f(x)$ no es continua en el intervalo $[-1, 1]$.

Página 18

1. a) Es continua si $x \neq -2$, $x \neq -1$ y $x \neq 2$.

   Discontinuidad infinita (asíntota vertical) en $x = -2$; discontinuidad evitable en $x = -1$; discontinuidad de salto finito en $x = 2$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1$;

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ no existe; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$;

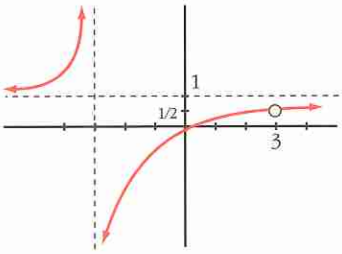
2 a) Indeterminado b) 0

c) 0 d) Indeterminado

e) Indeterminado f) Indeterminado

3 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$



4 a) 0 b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{1}{3}$

d) $+\infty$ e) 0 f) $\frac{1}{6}$

g) $+\infty$ h) $+\infty$ i) $\frac{1}{4}$

Página 19

5 a) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$; b) 0 c) 1

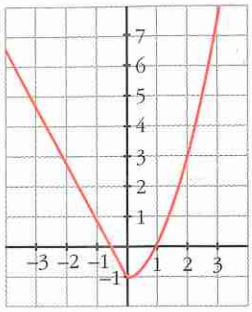
d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{2}$ f) 0 g) $e^{3/5}$ h) e^{-1} i) $+\infty$

6 a) Continua si $x \neq 0$. Discontinuidad de salto finito en $x = 0$.

b) Continua si $x \neq -1$. Discontinuidad infinita (asintota vertical) en $x = -1$.

7 a) $m = 1$, $n = 4$

b)



8 $f(x)$ no es continua en $x = 2$.

Página 20

1 $f'(2) = 1$

2 $f'(4) = \dfrac{1}{4}$

3 $f'(-1) = -2$

4 $f'(-1) = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$; $f'(3) = \dfrac{1}{4}$

Página 21

5 a) No es derivable en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$. En $x = -1$ y $x = 1$ hay puntos angulosos (derivadas laterales distintas); en $x = 2$ no está definida.

b) No es derivable en $x = 2$, pues no es continua en ese punto.

c) No es derivable en $x = -1$, ni en $x = 1$; hay punto angulosos (derivadas laterales distintas).

d) Es derivable.

6 $f'(-2) = 0$; $f'(0) = \dfrac{1}{2}$; $f'(3) = -1$

7 a) $f'(1^-) = -1$; $f'(1^+) = 1$

$f(x)$ no es derivable en $x = 1$.

b) $f'(1^-) = 2$; $f'(1^+) = 2$

Como coinciden, y $f(x)$ es continua en $x = 1$, $f(x)$ es derivable en $x = 1$ y su derviada es $f'(1) = 2$.

8 La función no es continua en $x = 2$.

9 a) $f'(x) = 6x$ b) $f'(x) = \dfrac{6}{(x+2)^2}$